Il toro non è una palla

Una costruzione generale: pull-back di 1-forme

Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti di $\mathbb{R}^2$ e $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ una mappa di classe C^1,

$$\Phi(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big) \qquad \text{per ogni} \qquad (x,y) \in \Omega_1.$$

Sia α una 1-forma su Ω_2. Scriviamo

$$\alpha = a(u,v)\, du + b(u,v)\, dv.$$

Definiamo la 1-forma β su Ω_1 come:

$$\begin{aligned}
\beta &= a\big(u(x,y), v(x,y)\big) \Big(\partial_x u(x,y)\, dx + \partial_y u(x,y)\, dy\Big) \\
&\quad + b\big(u(x,y), v(x,y)\big) \Big(\partial_x v(x,y)\, dx + \partial_y v(x,y)\, dy\Big) \\
&= \Big(a\big(u(x,y), v(x,y)\big)\partial_x u(x,y) + b\big(u(x,y), v(x,y)\big)\, \partial_x v(x,y)\Big)\, dx \\
&\quad + \Big(a\big(u(x,y), v(x,y)\big)\partial_y u(x,y) + b\big(u(x,y), v(x,y)\big)\, \partial_y v(x,y)\Big)\, dy\,.
\end{aligned}$$

La 1-forma β è detta pull-back di α.
Per indicare, il pull-back, si usa spesso la notazione $\beta = \Phi^*\alpha$.

Nel seguito vedremo che il pull-back $\beta = \Phi^*\alpha$ eredita le proprietà della forma α.

Lemma 1. *Se Φ è di classe C^2 e α è chiusa, allora anche β è chiusa.*

Dimostrazione: Ricordiamo che α è chiusa se e solo se

$$\partial_v a(u,v) = \partial_u b(u,v).$$

Per verificare se β è una forma chiusa, calcoliamo

$$\begin{aligned}
&\partial_y\Big(a(u,v)\partial_x u + b(u,v)\, \partial_x v\Big) - \partial_x\Big(a(u,v)\partial_y u + b(u,v)\, \partial_y v\Big) \\
&= \Big(\partial_u a(u,v)\partial_y u + \partial_v a(u,v)\partial_y v\Big)\partial_x u + \cancel{a(u,v)\partial_{yx} u} \\
&\quad + \Big(\partial_u b(u,v)\partial_y u + \partial_v b(u,v)\partial_y v\Big)\partial_x v + \cancel{b(u,v)\partial_{yx} v} \\
&\quad - \Big(\partial_u a(u,v)\partial_x u + \partial_v a(u,v)\partial_x v\Big)\partial_y u - \cancel{a(u,v)\partial_{xy} u} \\
&\quad - \Big(\partial_u b(u,v)\partial_x u + \partial_v b(u,v)\partial_x v\Big)\partial_y v - \cancel{b(u,v)\partial_{xy} v} \\
&= \Big(\cancel{\partial_u a(u,v)\partial_y u} + \partial_v a(u,v)\partial_y v\Big)\partial_x u \\
&\quad + \Big(\partial_u b(u,v)\partial_y u + \cancel{\partial_v b(u,v)\partial_y v}\Big)\partial_x v \\
&\quad - \Big(\cancel{\partial_u a(u,v)\partial_x u} + \partial_v a(u,v)\partial_x v\Big)\partial_y u \\
&\quad - \Big(\partial_u b(u,v)\partial_x u + \cancel{\partial_v b(u,v)\partial_x v}\Big)\partial_y v \\
&= \Big(\partial_v a - \partial_u b\Big)\partial_y v\, \partial_x u - \Big(\partial_v a - \partial_u b\Big)\partial_y u\, \partial_x v = 0\,.
\end{aligned}$$

□

Il lemma seguente non servira nella dimostrazione del teorema principle, ma è di interesse generale.

Lemma 2. *Se Φ è di classe C^1 e α è esatta, allora anche β è esatta.*

Dimostrazione: Se α è esatta, allora esiste una funzione

$$F : \Omega_2 \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\alpha = dF = \partial_u F(u,v)du + \partial_v F(u,v)dv,$$

ovvero

$$a(u,v) = \partial_u F(u,v) \qquad \text{e} \qquad b(u,v) = \partial_v F(u,v).$$

Allora,

$$\begin{aligned}
\beta &= \Big(\partial_u F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\partial_x u(x,y) + \partial_v F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\,\partial_x v(x,y)\Big)\,dx \\
&\quad + \Big(\partial_u F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\partial_y u(x,y) + \partial_v F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\,\partial_y v(x,y)\Big)\,dy \\
&= \partial_x\Big(F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big)\,dx + \partial_y\Big(F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big)\,dy \\
&= d\Big(F\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big),
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Lemma 3. *Sia $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo di classe C^1. Sia $\gamma : [A,B] \to \Omega_1$ una curva chiusa e C^1 a tratti. Allora anche $\Phi \circ \gamma : [A,B] \to \Omega_2$ è una curva chiusa e C^1 a tratti. Inoltre,*

$$\int_\gamma \beta = \int_{\Phi\circ\gamma} \alpha.$$

Dimostrazione: Per ogni $t \in [A,B]$ scriviamo

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big).$$

Di conseguenza,

$$\Phi \circ \gamma(t) = \Big(u\big(x(t),y(t)\big), v\big(x(t),y(t)\big)\Big).$$

Siccome Φ è di classe C^1, $\Phi \circ \gamma$ eredita la regolarità di γ. Ora, dimostriamo che $\displaystyle\int_\gamma \beta = \int_{\Phi\circ\gamma} \alpha$.

Per definizione abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \beta &= \int_A^B \Big(a\big(u(x,y),v(x,y)\big)\partial_x u(x,y) + b\big(u(x,y),v(x,y)\big)\,\partial_x v(x,y)\Big)x'(t)\,dt \\
&\quad + \int_A^B \Big(a\big(u(x,y),v(x,y)\big)\partial_y u(x,y) + b\big(u(x,y),v(x,y)\big)\,\partial_y v(x,y)\Big)y'(t)\,dt \\
&= \int_A^B a\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big(\partial_x u(x,y)x'(t) + \partial_y u(x,y)y'(t)\Big)\,dt \\
&\quad + \int_A^B b\big(u(x,y),v(x,y)\big)\Big(\partial_x v(x,y)x'(t) + \partial_y v(x,y)y'(t)\Big)\,dt \\
&= \int_A^B a\big(u(x,y),v(x,y)\big)\,\partial_t\Big[u\big(x(t),y(t)\big)\Big]\,dt \\
&\quad + \int_A^B b\big(u(x,y),v(x,y)\big)\,\partial_t\Big[v\big(x(t),y(t)\big)\Big]\,dt = \int_{\Phi\circ\gamma} \alpha.
\end{aligned}$$

$\square$

Il toro e la palla

Definizione 4. *Diremo che due domini Ω_1 e Ω_2 di $\mathbb{R}^n$ sono C^k-diffeomorfi se:*

- *esiste una funzione biunivoca $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$;*
- *Φ e la sua inversa $\Psi : \Omega_2 \to \Omega_1$ sono di classe C^k .*

Teorema 5 (Il toro non è una palla)**.**

(a) $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *non sono* C^2*-diffeomorfi;*

(b) *in* $\mathbb{R}^2$, B_1 *e* $B_1 \setminus \{(0,0)\}$ *non sono* C^2*-diffeomorfi;*

(c) *in* $\mathbb{R}^2$, B_1 *e* $B_1 \setminus \overline{B}_{1/2}$ *non sono* C^2*-diffeomorfi;*

(d) *in* $\mathbb{R}^3$, B_1 *e* T *non sono* C^2*-diffeomorfi, dove* T *è il toro*

$$T := \left\{ (x,y,z) \ : \ \left(x - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + \left(y - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + z^2 < \frac{1}{4} \right\}.$$

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ siano diffeomorfi. Allora esitono una mappa (di classe C^1) biunivoca

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \text{e la sua inversa} \qquad \Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2.$$

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ consideriamo la 1-forma

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

e la curva chiusa

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \sigma(t) = \big(\cos t \,,\, \sin t \big).$$

La 1-forma α è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ma non esatta. In particolare,

$$\begin{aligned} \int_\sigma \alpha &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-y(t)}{x(t)^2+y(t)^2} x'(t) + \frac{x(t)}{x(t)^2+y(t)^2} y'(t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Definiamo la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = \Psi \circ \sigma(t).$$

Allora, γ è una curva chiusa di classe C^1; inoltre, per definizione, abbiamo $\sigma = \Phi \circ \gamma$. Definiamo la 1-forma β come in Lemma 1. Allora β è una forma chiusa, e quindi esatta, in $\mathbb{R}^2$. Quindi,

$$\int_\gamma \beta = 0.$$

D'altra parte, per il Lemma 3, abbiamo che

$$\int_\gamma \beta = \int_{\Phi \circ \gamma} \alpha = \int_\sigma \alpha = 2\pi$$

il che è un assurdo. La dimostrazione di (b), (c) e (d) è analoga. □